

文章编号:1000-8055(2011)01-0173-05

多元混合数据回归分析方法

傅惠民, 岳晓蕊

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 针对加速寿命试验中经常遇到完全数据、定数截尾数据和定时截尾数据混合的情况, 提出一种多元混合数据回归分析方法, 建立了多元混合回归模型, 给出回归系数和标准差的最佳无偏估计, 以及百分位值的点估计和置信限估计. 该方法不但适用于正态分布, 而且还适用于 Weibull 分布、极值分布等其他各种位置-尺度分布, 从而将传统只适用于完全数据的多元回归分析推广到完全数据和截尾数据混合的情况. 与传统方法相比, 该方法具有信息量大、精度高的优点.

关 键 词: 加速寿命试验; 截尾数据; 多元回归分析; 性能测试; 寿命预测; 可靠性分析

中图分类号: TB301; O211

文献标识码: A

Multiple regression analysis method for mixed data

FU Hui-min, YUE Xiao-rui

(Research Center of Small Sample Technology,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Aiming at the mixed data composed of complete data, type-I censored data and type-II censored data which are very common in accelerated life test, a multiple regression analysis method were developed. The multiple regression model was established, and the best unbiased estimations of regression coefficients and the standard deviation were given. Furthermore, the point estimation and confidence limits of percentiles were obtained. The presented method is applicable to not only the normal distribution but also the Weibull distribution, the extreme value distribution and some other location-scale distributions. The traditional multiple regression analysis method which is strictly suitable to the complete data is extended to the mixed data composed of complete data and censored data. Compared with the traditional method, the presented method can reach a high precision and a great number of specimens can be saved.

Key words: accelerated life test; censored data; multiple regression analysis; performance test; life prediction; reliability analysis

鉴于工程中经常遇到完全数据、定数截尾数据和定时截尾数据混合的情况, 文献[1]提出了定时截尾数据回归分析方法, 在此基础上, 文献[2]建立了混合数据回归分析方法, 可以将多个状态下的混合数据作为一个整体进行统计分析. 本文

针对产品在工作环境中受到多种应力(如温度、湿度、电压、载荷等)联合作用的情况^[3-6], 进一步建立一种多元混合数据回归分析方法, 将传统的多元回归分析推广到混合数据和极值分布、Weibull 分布等位置-尺度分布的情况, 解决了多种应力

收稿日期:2010-07-26; 修订日期:2010-12-06

基金项目:国家自然科学基金(10472006); 北京市教育委员会共建项目(XK100060418)

作者简介:傅惠民(1956—), 男, 浙江遂昌人, “长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究.

(如温度、湿度、电压、载荷等)联合作用下混合数据的回归分析问题。

1 多元混合数据回归分析方法

设 y 为服从位置-尺度分布的随机变量,其分布函数为

$$F\left[\frac{y-\mu(\mathbf{x})}{\sigma}\right], \quad -\infty < y < \infty \quad (1)$$

式中 $\mu(\mathbf{x})$ 为状态 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$ 下的位置参数, $\sigma > 0$ 为尺度参数。令 $y^\circ = [y - \mu(\mathbf{x})]/\sigma$, 则 y° 为标准位置-尺度分布随机变量,其分布函数和概率密度函数分别记为 $F(y^\circ)$ 和 $f(y^\circ)$ 。若 $\mu(\mathbf{x})$ 与自变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$ 成线性关系,即

$$\mu(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_r x_r \quad (2)$$

则随机变量 y 可表示为

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^r a_j x_j + \varepsilon \quad (3)$$

式中 ε 为随机误差, $a_0, a_1, \dots, a_r$ 和 σ 均为待定参数。

1.1 参数的最佳无偏整体估计

设在状态 $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ri})^T$ 进行了 n_i 个试样的试验,有 q_i 个试样失效,得到失效数据 $y_{i1} \leq y_{i2} \leq \dots \leq y_{iq_i}, i=1, 2, \dots, m$ 。其中完全数据、定数截尾数据和定时截尾数据的情况如下:在 m_1 个状态 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{m_1}$ 得到了完全数据,即 $q_i = n_i, i=1, 2, \dots, m_1$; 在 m_2 个状态 $\mathbf{x}_{m_1+1}, \mathbf{x}_{m_1+2}, \dots, \mathbf{x}_{m_1+m_2}$ 得到了定数截尾数据,即最后一个失效数据与试验截止时刻相等,且 $q_i < n_i, i=m_1+1, m_1+2, \dots, m_1+m_2$; 在 m_3 个状态 $\mathbf{x}_{m_1+m_2+1}, \mathbf{x}_{m_1+m_2+2}, \dots, \mathbf{x}_{m_1+m_2+m_3}$ 得到了定时截尾数据,并设 $y_{i(q_i+1)} \neq y_{i q_i}$ 为状态 $\mathbf{x}_i$ 下的第一个未失效数据(即试验截止时刻),根据文献[7]可知, $y_{i(q_i+1)}$ 可以看作样本量为 n_i 的第 q_i 个区间统计量的一个取值, $i=m_1+m_2+1, m_1+m_2+2, \dots, m_1+m_2+m_3$, 且 $m_1+m_2+m_3=m$ 。

令 $\boldsymbol{\theta}$ 为待定参数 $a_0, a_1, \dots, a_r$ 和 σ 组成的向量,即

$$\boldsymbol{\theta} = (a_0, a_1, \dots, a_r, \sigma)^T \quad (4)$$

那么根据 Gauss-Markov 定理可得, $\boldsymbol{\theta}$ 的无偏整体估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_r, \hat{\sigma})^T = \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_i^T \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Z}_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_i^T \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{y}_i \right] \quad (5)$$

其协方差矩阵为

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \text{Cov}\left[(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_r, \hat{\sigma})^T\right] = \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_i^T \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Z}_i \right]^{-1} \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iq_i})^T \quad (7)$$

$$i=1, 2, \dots, m_1+m_2$$

$$\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i(q_i+1)})^T \quad (8)$$

$$i=m_1+m_2+1, m_1+m_2+2, \dots, m$$

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & \dots & x_{ri} & u_{i1} \\ 1 & x_{1i} & \dots & x_{ri} & u_{i2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1i} & \dots & x_{ri} & u_{iq_i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$i=1, 2, \dots, m_1+m_2$$

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & \dots & x_{ri} & u_{i1} \\ 1 & x_{1i} & \dots & x_{ri} & u_{i2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1i} & \dots & x_{ri} & u_{iq_i} \\ 1 & x_{1i} & \dots & x_{ri} & u_{i(q_i+1)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$i=m_1+m_2+1, m_1+m_2+2, \dots, m$$

$$\mathbf{V}_i = [\nu_{ikl}]_{q_i \times q_i} \quad (11)$$

$$i=1, 2, \dots, m_1+m_2$$

$$\mathbf{V}_i = [\nu_{ikl}]_{(q_i+1) \times (q_i+1)} \quad (12)$$

$$i=m_1+m_2+1, m_1+m_2+2, \dots, m$$

其中

$$u_{ik} = \frac{n_i!}{(k-1)!(n_i-k)!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^\circ f(y^\circ) [F(y^\circ)]^{k-1} \cdot [1-F(y^\circ)]^{n_i-k} dy^\circ \quad (13)$$

$$i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, q_i$$

$$u_{i(q_i+1)} = \frac{(n_i+1)!}{q_i!(n_i-q_i)!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^\circ f(y^\circ) [F(y^\circ)]^{q_i} \cdot [1-F(y^\circ)]^{n_i-q_i} dy^\circ \quad (14)$$

$$i=m_1+m_2+1, m_1+m_2+2, \dots, m$$

$$\nu_{ikl} = \text{Cov}(y_{ik}^\circ, y_{il}^\circ) = E(y_{ik}^\circ y_{il}^\circ) - u_{ik} u_{il} \quad (15)$$

$$E(y_{ik}^{\circ}, y_{il}^{\circ}) = \frac{n_i!}{(k-1)!(l-k-1)!(n_i-l)!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_{ik}^{\circ} y_{il}^{\circ} f(y_{ik}^{\circ}) f(y_{il}^{\circ}) \cdot [F(y_{ik}^{\circ})]^{k-1} [F(y_{il}^{\circ}) - F(y_{ik}^{\circ})]^{l-k-1} \cdot [1 - F(y_{il}^{\circ})]^{n_i-l} dy_{ik}^{\circ} dy_{il}^{\circ} \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; k, l = 1, 2, \dots, q_i$$

$$E(y_{ik}^{\circ}, y_{i(q_i+1)}^{\circ}) = \frac{(n_i+1)!}{(k-1)!(q_i-k)!(n_i-q_i)!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_{ik}^{\circ} y_{i(q_i+1)}^{\circ} f(y_{ik}^{\circ}) f(y_{i(q_i+1)}^{\circ}) \cdot [F(y_{ik}^{\circ})]^{k-1} [F(y_{i(q_i+1)}^{\circ}) - F(y_{ik}^{\circ})]^{q_i-k} \cdot [1 - F(y_{i(q_i+1)}^{\circ})]^{n_i-q_i} dy_{ik}^{\circ} dy_{i(q_i+1)}^{\circ} \quad (17)$$

$$i = m_1 + m_2 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, q_i + 1$$

证明:由 $y^{\circ} = [y - \mu(x)]/\sigma$ 可得

$$y_{ik}^{\circ} = \mu(x_i) + \sigma y_{ik}^{\circ} \quad (18)$$

式中 $y_{ik}^{\circ} (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, q_i)$ 为标准位置-尺度分布下样本量为 n_i 的第 k 个顺序统计量,且

$$E(y_{ik}^{\circ}) = u_{ik} \quad (19)$$

$$\text{Cov}(y_{ik}^{\circ}, y_{il}^{\circ}) = v_{ikl} \quad (20)$$

$y_{i(q_i+1)}^{\circ} (i=m_1+m_2+1, m_1+m_2+2, \dots, m)$ 为该样本第 q_i 个区间统计量,且

$$E(y_{i(q_i+1)}^{\circ}) = u_{i(q_i+1)} \quad (21)$$

$$\text{Cov}(y_{ik}^{\circ}, y_{i(q_i+1)}^{\circ}) = \text{Cov}(y_{i(q_i+1)}^{\circ}, y_{ik}^{\circ}) = v_{ik(q_i+1)} \quad (22)$$

$$k=1, 2, \dots, q_i+1$$

令 $\epsilon_{ik} = \sigma(y_{ik}^{\circ} - u_{ik})$,则由式(19)~式(22)可知

$$E(\epsilon_{ik}) = 0 \quad (23)$$

$$\text{Cov}(\epsilon_{ik}, \epsilon_{il}) = \sigma^2 v_{ikl} \quad (24)$$

将 $\epsilon_{ik} = \sigma(y_{ik}^{\circ} - u_{ik})$ 代入式(18)可得多元混合数据回归方程为

$$y_{ik} = a_0 + \sum_{j=1}^r a_j x_j + \sigma u_{ik} + \epsilon_{ik} \quad (25)$$

且

$$E(y_{ik}) = a_0 + \sum_{j=1}^r a_j x_j + \sigma u_{ik} \quad (26)$$

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{il}) = \sigma^2 v_{ikl} \quad (27)$$

根据式(7)~式(12),式(25)~式(27)可写成矩阵形式的多元混合数据回归方程

$$y_i = Z_i \theta + \epsilon_i \quad (28)$$

$$E(y_i) = Z_i \theta \quad (29)$$

$$\text{Cov}(y_i) = \sigma^2 V_i \quad (30)$$

式中

$$\epsilon_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{i q_i})^T \quad (31)$$

$$i = 1, 2, \dots, m_1 + m_2$$

$$\epsilon_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \dots, \epsilon_{i(q_i+1)})^T \quad (32)$$

$$i = m_1 + m_2 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, m$$

根据 Gauss-Markov 定理,其残差平方和为

$$Q = \sum_{i=1}^m (y_i - Z_i \theta)^T V_i^{-1} (y_i - Z_i \theta) \quad (33)$$

令 $\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$,求解方程即可得式(5),证毕!

1.2 位置参数与尺度参数的置信限估计

由式(2)可知, $\mu(x)$ 的点估计为

$$\hat{\mu}(x) = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^r \hat{a}_j x_j \quad (34)$$

根据大量 Monte-Carlo 模拟计算可知,当

$\sum_{i=1}^m q_i$ 稍大时, $\hat{\theta} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_r, \hat{\sigma})^T$ 近似服从正态分布.因此可以证明, $\hat{\mu}(x)$ 的单侧置信上限 $\mu_{\text{up}}(x)$ 和置信下限 $\mu_{\text{low}}(x)$ 分别为

$$\mu_{\text{up}}(x) = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^r \hat{a}_j x_j + \frac{\hat{\sigma} u_{\gamma}}{1 - u_{\gamma}^2 c_{(r+2)(r+2)}} \cdot \left\{ u_{\gamma} s_2 + \sqrt{u_{\gamma}^2 s_2^2 + s_1 [1 - u_{\gamma}^2 c_{(r+2)(r+2)}]} \right\} \quad (35)$$

$$\mu_{\text{low}}(x) = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^r \hat{a}_j x_j + \frac{\hat{\sigma} u_{\gamma}}{1 - u_{\gamma}^2 c_{(r+2)(r+2)}} \cdot \left\{ u_{\gamma} s_2 - \sqrt{u_{\gamma}^2 s_2^2 + s_1 [1 - u_{\gamma}^2 c_{(r+2)(r+2)}]} \right\} \quad (36)$$

尺度参数 σ 的单侧置信上限 σ_{up} 和置信下限 σ_{low} 分别为

$$\sigma_{\text{up}} = \frac{\hat{\sigma}}{1 - u_{\gamma} \sqrt{c_{(r+2)(r+2)}}} \quad (37)$$

$$\sigma_{\text{low}} = \frac{\hat{\sigma}}{1 + u_{\gamma} \sqrt{c_{(r+2)(r+2)}}} \quad (38)$$

式中 γ 为置信水平, u_{γ} 为标准正态偏量,且

$$s_1 = c_{11} + 2 \sum_{k=1}^r c_{1(k+1)} x_k + \sum_{k,l=1}^r c_{(k+1)(l+1)} x_k x_l \quad (39)$$

$$s_2 = c_{1(r+2)} + \sum_{k=1}^r c_{(k+1)(r+2)} x_k \quad (40)$$

$$[c_{kl}]_{(r+2) \times (r+2)} = \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_i^T \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Z}_i \right]^{-1} \quad (41)$$

1.3 百分位值点估计及其置信限估计

随机变量 y 概率为 P 的百分位值 $y_P(\mathbf{x})$ 的无偏估计为

$$\hat{y}_P(\mathbf{x}) = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^r \hat{a}_j x_j + \hat{\sigma} F^{-1}(P) \quad (42)$$

其单侧置信上限 $y_{\text{Pup}}(\mathbf{x})$ 和下限 $y_{\text{Plow}}(\mathbf{x})$ 分别为

$$y_{\text{Pup}}(\mathbf{x}) = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^r \hat{a}_j x_j + \frac{\hat{\sigma}}{1 - u_{\gamma}^2 c_{(r+2)(r+2)}} \cdot [F^{-1}(P) + u_{\gamma}^2 s_2 + u_{\gamma} \sqrt{\omega_P}] \quad (43)$$

$$y_{\text{Plow}}(\mathbf{x}) = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^r \hat{a}_j x_j + \frac{\hat{\sigma}}{1 - u_{\gamma}^2 c_{(r+2)(r+2)}} \cdot [F^{-1}(P) + u_{\gamma}^2 s_2 - u_{\gamma} \sqrt{\omega_P}] \quad (44)$$

式中

$$\omega_P = u_{\gamma}^2 s_2^2 + s_1 [1 - u_{\gamma}^2 c_{(r+2)(r+2)}] + 2 s_2 F^{-1}(P) + c_{(r+2)(r+2)} [F^{-1}(P)]^2 \quad (45)$$

2 正态分布多元混合数据回归分析

设 y 为服从正态分布的随机变量, 其分布函数为

$$F(y) = \Phi \left[\frac{y - \mu(\mathbf{x})}{\sigma} \right] \quad (46)$$

式中 $\mu(\mathbf{x})$ 为状态 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$ 下的均值, σ 为标准差, $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数. 若 $\mu(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$ 的线性函数, 则回归方程可表示为

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^r a_j x_j + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (47)$$

参数 $a_0, a_1, \dots, a_r$ 和 σ 的最佳无偏整体估计由式(5)给出, 式中 u_{ik} 和 v_{ikl} 分别为标准正态分布顺序统计量的均值和协方差. 当样本量不大于 50 时, u_{ik} 和 v_{ikl} 可由文献[8-9]查表得到, 当样本量较大时, 可根据文献[10]方法计算得到.

均值 $\mu(\mathbf{x})$ 和标准差 σ 的置信限由 1.2 节计算, 百分位值的点估计及其置信限由 1.3 节计算, 此时式(42)~式(45)中 $F^{-1}(P) = \Phi^{-1}(P)$.

3 极值分布多元混合数据回归分析

设 y 为服从极值分布的随机变量, 其分布函数为

$$F(y) = 1 - \exp \left\{ -\exp \left[\frac{y - \mu(\mathbf{x})}{\sigma} \right] \right\} \quad (48)$$

式中 $\mu(\mathbf{x})$ 为位置参数, σ 为尺度参数. 若 $\mu(\mathbf{x})$ 与 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$ 之间存在线性关系, 则回归方程可表示为

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^r a_j x_j + \varepsilon \quad \varepsilon \sim EV(0, \sigma) \quad (49)$$

参数 $a_0, a_1, \dots, a_r$ 和 σ 的最佳无偏整体估计由式(5)给出, 式中 u_{ik} 和 v_{ikl} 分别为标准极值分布顺序统计量的均值和协方差. 当样本量不大于 30 时, u_{ik} 和 v_{ikl} 可由文献[11]查表得到, 当样本量较大时, 可根据文献[10]方法计算得到.

位置参数 $\mu(\mathbf{x})$ 和尺度参数 σ 的置信限由 1.2 节计算, 百分位值的点估计及其置信限由 1.3 节计算, 此时式(42)~式(45)中 $F^{-1}(P) = \ln \ln \frac{1}{1-P}$.

4 结论

1) 建立位置-尺度分布的多元混合数据回归分析方法, 给出回归系数、标准差的无偏点估计和置信限估计公式.

2) 给出百分位值的点估计和置信限估计, 其百分率的置信限可以根据文献[12]中的置信限等同性得到.

3) 建立正态分布、极值分布多元混合数据回归分析方法. 对于 Weibull 分布多元混合数据回归分析问题, 可通过对数变换转化为极值分布多元混合数据回归分析进行处理.

4) 本文方法可以将多个状态下不同类型的数据作为一个整体进行统计推断, 工程实例及大量 Monte-Carlo 模拟表明, 该方法预测精度高, 所需试样少.

5) 本文方法可用于多应力加速寿命试验设计和数据处理, 并且允许在不同的应力水平下根据实际情况选择合适的截尾方式.

参考文献:

- [1] 傅惠民, 岳晓蕊. 定时截尾数据回归分析方法[J]. 航空动力学报, 2010, 25(1): 142-147.
FU Huimin, YUE Xiaorui. Regression analysis method for type-I censored data[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(1): 142-147. (in Chinese)
- [2] 傅惠民, 岳晓蕊. 混合数据回归分析方法[J]. 机械强度, 2010, 32(6): 922-927.
FU Huimin, YUE Xiaorui. Regression analysis method for mixed data[J]. Journal of Mechanical Strength, 2010, 32(6): 922-927. (in Chinese)
- [3] Nelson W. Accelerated testing: statistical models, test,

- plans and data analyses[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [4] 茆诗松, 王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [5] 李晓阳, 姜同敏. 加速寿命试验中多应力加速模型综述[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(5): 828-831.
- LI Xiaoyang, JIANG Tongmin. Review of multiple-stress models in accelerated life testing[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(5): 828-831. (in Chinese)
- [6] 钱萍. 航天电连接器综合应力加速寿命试验与统计分析的研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2010.
- QIAN Ping. Research on multiple stress accelerated life test and statistical analysis of aerospace electrical connector[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2010. (in Chinese)
- [7] 傅惠民. 区间统计量及其分布[J]. 机械强度, 2005, 27(6): 752-757.
- FU Huimin. Interval statistic and its distribution[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(6): 752-757. (in Chinese)
- [8] Parrish R S. Computing expected values of normal order statistics[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1992, 21(1): 57-70.
- [9] Parrish R S. Computing variances and covariances of normal order statistics[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1992, 21(1): 71-101.
- [10] 傅惠民, 林逢春. 大样本顺序统计量均值、方差和协方差计算与验证[J]. 机械强度, 2007, 29(1): 048-052.
- FU Huimin, LIN Fengchun. Computation and verification of means, variances and covariances for large sample order statistics. [J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(1): 048-052. (in Chinese)
- [11] Balakrishnan N, Chan P S. Order statistics from extreme value distribution: I — Table of means, variances and covariances[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1992, 21(4): 1199-1217.
- [12] 傅惠民. 连续母体百分位值和百分率的区间估计和假设检验[J]. 航空学报, 1993, 14(11): 569-577.
- FU Huimin. Interval estimation and hypothesis test for percent tiles and percentages of continuous distributions [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1993, 14(11): 569-577. (in Chinese)